09.02.18

Глава 1. Векторные пространства

§1. Абстрактные векторные пространства

направленный отрезок

считаем равными различные на рисунке векторы -
приём абстракции

Фиксируем внимание на свойствах и отношениях между объектами.

Аксиоматический способ опр. понятий
(Изучали векторное пространства строк и столбцов

Определение. Непустое множество V наз. векторным (линейным) пространством, если

I Для любых двух элементов $x, y \in V$ однозначно определен элемент
$z = x + y$ - сумма
причем выполняются след. свойства:

1) $x+y=y+x$ - коммутативность

2) $x+(y+z)=(x+y)+z$ - ассоциативность

3) в V сущ. выделенный элемент, называемый нулевым вектором $\exists 0;\ \forall x \in V \quad x+0=x$

4) $\forall x \in V$ сущ. противоположный (обратный) вектор $-x$
$(x+(-x)=0)$

V - является абелевой группой по сложению.

II Для любого числа α и любого элемента $x \in V$ определен элемент αx - произведение эл. x на число α, причем выполняются след. свойства

5) $1 \cdot x = x$

6) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ - ассоциативность

Сложение и умножение связаны законами дистрибутивности

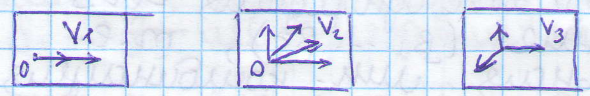
7) $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$

8) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$.

Если числа вещественные, то V наз вещ. векторным пространством
Если числа комплексные, то V наз комплекс. вектор. пространством

примеры

1) геометрические пространства векторов V_1 V_2 V_3 на прямой, на плоскости и в пространстве



2) пространство вещественных матриц $\mathbb{R}^{m \times n}$

3) Арифметическое (координатное) пр-во $\mathbb{R}^n$
$\mathbb{R}^n = \{ a = (a_1 \dots a_n) \mid a_i \in \mathbb{R} \}$
$a+b = (a_1+b_1; \dots a_n+b_n)$ $\quad \alpha a = (\alpha a_1; \alpha a_2 \dots \alpha a_n)$

4) пространство многочленов $f(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$

5) совокупность непрерывных функций на заданном отрезке $[a, b]$ $C[a, b]$

§2. Линейная зависимость и независимость. Размерность и базис.

Линейная комбинация – $\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \ldots + \lambda_n V_n$ $\lambda_i \in \mathbb{R}$ $V_i \in V$

Определение. Вектора $V_1 \ldots V_n$ пр-ва V наз линейно зависимыми если некоторая нетривиальная линейная комбинация ($\exists \lambda \neq 0$) равна нулю

т.е. $\exists \lambda_1 \ldots \lambda_n$ не все равные 0 | $\lambda_1 V_1 + \ldots \lambda_n V_n = 0$

В противном случае система векторов $V_1 \ldots V_n$ наз линейно независимой.

Лин. комбинация $\lambda_1 V_1 + \ldots + \lambda_n V_n = 0 \iff$ все $\lambda_i = 0$

Теорема 1.

Вектора $V_1 \ldots V_n$ $(n \geq 2)$ лин. зависимы тогда и только тогда, когда хотя бы один из них является лин. комбинацией остальных.

Если система векторов лин. независима, то всякая её подсистема будет также лин. независима

Теорема 2.

Если в пространстве V каждый из векторов линейно независимой системы $\vec{e}_1 \ldots \vec{e}_s$ явл линейной комбинацией векторов системы $\vec{f}_1 \ldots \vec{f}_t$, то $s \leq t$.

Док-во. По условию имеем: $\vec{e}_1 = \lambda_{11} \vec{f}_1 + \lambda_{21} \vec{f}_2 + \ldots + \lambda_{t1} \vec{f}_t$

$\vdots$

$\vec{e}_s = \lambda_{1s} \vec{f}_1 + \lambda_{2s} \vec{f}_2 + \ldots + \lambda_{ts} \vec{f}_t$

с некоторыми коэф λ_{ij}. Предположим, что $s > t$.

Составим лин. комбинацию векторов $\vec{e}_1 \ldots \vec{e}_s$ коэф $x_1 \ldots x_s$

$$x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \ldots + x_s \vec{e}_s = x_1 (\lambda_{11} \vec{f}_1 + \ldots + \lambda_{t1} \vec{f}_t) + \ldots + x_s (\lambda_{1s} \vec{f}_1 + \ldots + \lambda_{ts} \vec{f}_t) =$$

$$= (\lambda_{11} x_1 + \lambda_{12} x_2 + \ldots + \lambda_{1n} x_n) \vec{f}_1 + \ldots + (\lambda_{t1} x_1 + \ldots + \lambda_{ts} x_s) \vec{f}_t$$

и рассмотрим систему из t лин. уравнений с s неизвестными

$$\begin{cases} \lambda_{11} x_1 + \ldots \lambda_{1s} x_s = 0 \\ \\ \lambda_{t1} x_1 + \ldots + \lambda_{ts} x_s = 0 \end{cases}$$

Так как по предположению $s > t$, то эта однородная СЛУ имеет нетривиальное решение $(\beta_1 \ldots \beta_s)$, т.е

$\beta_1 \vec{e}_1 + \ldots \beta_s \vec{e}_s = 0$ нетривиальная лин. комбинация равна 0

Противоречие с лин. независимостью $\vec{e}_1 \ldots \vec{e}_s$

Значит $s \leq t$

Следствие: Любые две эквивалентные лин. независимые системы векторов в V содержат одинаковое кол-во векторов

Две системы эквивалентны, когда каждый вектор одной системы является лин. комбинацией векторов другой системы

Определение. Число векторов, содержащихся в любой максимальной лин. независимой подсистеме данной системы векторов наз. <u>рангом</u> этой системы.
(максимальная - т.е нельзя расширить до лин. независимого подсистемы из большего числа векторов)

Определение. Линейное пространство V, в котором существует n лин независимых векторов, но нет лин. независимых систем с большим числом векторов (большего ранга) наз <u>n - мерным</u> ($\dim V = n$)

Нулевое пр-во считается нульмерным.

Определение Пусть V - n-мерное векторное пространство. Любая система из n лин. независимых векторов $e_1 \dots e_n$ наз. <u>базисом</u> пр-ва V

<u>примеры</u> 1) $\mathbb{R}^n$ $e_1 = (1\,0 \dots 0)$, $e_2 (0\,1 \dots 0) \dots e_n (0\,0 \dots 1)$

2) многочлены степени $\leq n$: $1, x, x^2 \dots x^n$

Теорема (о разложении по базису)
Пусть V-векторное пр-во над $\mathbb{R}$ (или над $\mathbb{C}$) с базисом $e_1 \dots e_n$
Тогда каждый вектор $v \in V$ можно представить и притом единственным образом в виде лин. комбинации векторов $\overline{e}_1 \dots \overline{e}_n$

Док-во. К системе $\overline{e}_1 \dots \overline{e}_n$ добавим вектор $v \Rightarrow$ получим лин. зависимую систему, т.е $\alpha v + \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = 0$
нетривиальная лин. комбинация
причем $\alpha \neq 0$ $\Rightarrow v = -\frac{\alpha_1}{\alpha} e_1 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha} e_n$

Если бы $V = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n$, то
$(\beta_1 - \alpha_1) e_1 + \dots + (\beta_n - \alpha_n) e_n = 0 \Leftrightarrow \alpha_i - \beta_i = 0$, т.к. $\overline{e}_1 \dots \overline{e}_n$ лин. независ.

Базис - это лин. независимая полная система векторов (полная - т.е каждый вектор $v \in V$ выражается через него)

Теорема (о дополнении до базиса)
Всякую систему из $S \leq n$ лин. независимых вект. $\vec{f}_1 \dots \vec{f}_s$ можно дополнить до базиса

Док-во. Рассмотрим систему векторов $\vec{f}_1 \dots \vec{f}_s, \vec{e}_1 \dots \overline{e}_n$ (добавим вект.)
выбросим из этой системы все векторы, которые выражаются через предыдущие
$f_1 \dots f_s$ - лин. независимые $\Rightarrow$ ни один из них не будет выброшен
Останется система $f_1 \dots f_s, e_{i1} \dots e_{ik}$ - лин. независима если
$\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_s f_s + \beta_1 e_{i1} + \dots + \beta_k e_{ik} = 0$, то $\beta_k = 0$
(иначе он бы выражался через предыдущие)
и т.д $\beta_i = 0$
$\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_s f_s \Rightarrow$ все $\alpha_i = 0$

т.е. система $f_1 \dots f_s\ e_{i1} \dots e_{ik}$ - лин. нез.
Кроме того, она максимальна т.к. все векторы выражаются через $e_1 \dots e_n$, тем более через $f_1 \dots f_s\ e_1 \dots e_n$ $\Rightarrow$ через $f_1 \dots f_s, f_{i1} \dots f_{ik}$

т.е. $f_1 \dots f_s\ e_{i1} \dots e_{ik}$ - базис V, а $e_{i1} \dots e_{ik}$ - дополнение $f_1 \dots f_s$ до базиса

16.08.18

§3 Координаты вектора. Переход к другому базису.

С помощью базиса абстрактные вектора можно задавать в виде совокупности чисел, а операции на векторами сводить к операциям над числами

Определение Пусть V - векторное пространство $e_1 \dots e_n$ - базис V.
Произвольный вектор $v \in V$ однозначно раскладыв. по базису

$$v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n$$

Скаляры $\lambda_1 \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$ (или $\in \mathbb{C}$) наз. координатами вектора $v \in V$ в данном базисе

$$v_e = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Если $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$; $y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_n e_n$, то

$$x + y = (x_1 + y_1) e_1 + (x_2 + y_2) e_2 + \dots + (x_n + y_n) e_n$$

$$(\lambda x)_e = (\lambda x_1, \lambda x_2 \dots \lambda x_n)^T \qquad \lambda x = \lambda x_1 e_1 + \dots + \lambda x_n e_n$$

<u>пример</u>

1) P_n - многочлен степени $\leq n$
один из базисов: $e_0 = 1,\ e_1 = x \dots e_n = x^n$

$f(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \dots + \lambda_n x^n$ $\qquad (\lambda_0 \dots \lambda_n)$ - координаты f в базисе e

2) $\mathbb{R}^n$
стандартный базис $e_1 = (1, 0 \dots 0)^T,\ e_2 = (0, 1, 0 \dots 0)^T \dots, e_n = (0, 0 \dots 1)^T$

Но! Например, в $\mathbb{R}^n$ имеется бесконечное мн-во других базисов, в которых координаты одного и того же вектора x служат другие числа

Пусть V - n-мерное векторное пространство, $(e_1 \dots e_n)$ и $(e'_1 \dots e'_n)$ - два базиса
Векторы одного базиса выражаются через векторы другого

$$e'_1 = t_{11} e_1 + t_{21} e_2 + \dots + t_{n1} e_n$$
$$\vdots$$
$$e'_n = t_{1n} e_1 + t_{2n} e_2 + \dots + t_{nn} e_n$$

Коэф этого разложения образуют матрицу перехода

$$T = (t_{ij}) = \begin{pmatrix} t_{11} & \dots & t_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ t_{n1} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

T наз. матрицей перехода от базиса e до базиса e'
! составляем по столбцам

В j-столбце в ней стоят координаты вектора e'_j отн базиса $(e_1 \dots e_n)$

В координатах:

$$[e'_1 \dots e'_n] = [e_1 \dots e_n]\cdot T \iff e' = e\cdot T$$ — ковариантный закон

Утв1 Матрица перехода к другому базису невырожденная ($\det T \neq 0$)

Док-во Пусть матрица T вырождена: $\det T = 0$

Тогда один из столбцов явл. лин комбинацией остальных

$\Rightarrow$ один из векторов $(e'_1 \dots e'_n)$, например, e'_j линейно выражается через другие векторы системы e' $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ противоречие с лин. независимостью e'

Утв2 Если T матрица перехода от базиса e к базису e', то T^{-1} — матрица перехода от базиса e' к базису e

Док-во $e' = eT \;\; \Big|\cdot \underset{\text{справа}}{T^{-1}} \;\; \Rightarrow e'T^{-1} = e$

Теорема

Координаты вектора x в базисах e и e' связаны между собой соотношением:

$$x_e = T\cdot x_{e'}$$ где T — матрица перехода от e к e'

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & \dots & t_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ t_{n1} & & t_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Док-во

$x = e x_e$ $\quad \left(\vec{x} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n = [e_1 \dots e_n]\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right)$

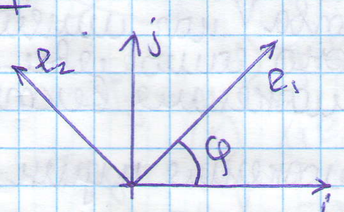
и $x = e' x'_e$ $\quad \left(\vec{x} = x'_1 e'_1 + x'_2 e'_2 + \dots + x'_n e'_n = [e'_1 \dots e'_n]\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}\right)$

$x = e' x'_e = (eT)\underset{\text{ассоциат}}{x'_e} = e(Tx'_e)$

$x = e x_e = e(Tx'_e)$

В силу единственности разложения по базису $x_e = Tx'_e$ контрвариантный закон

пример:



$e_1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$ $\quad e_2\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$

$$T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x_1 = x'_1\cos\varphi - x'_2\sin\varphi \\ x_2 = x'_1\sin\varphi + x'_2\sin\varphi \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = T^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x'_1 = x_1\cos\varphi + x_2\sin\varphi \\ x'_2 = x_2\cos\varphi - x_1\sin\varphi \end{cases}$$

§4. Изоморфизм векторных пространств.

Определение. Векторные пространства V и W над полем P ($P = \mathbb{R}$ или $P \in \mathbb{C}$) наз изоморфными (одинаковыми), если сущ. биективное отображение

$$f: V \to W \mid f(\underbrace{\alpha u + \beta v}_{\text{вектор из } V}) = \underbrace{\alpha f(u) + \beta f(v)}_{\text{вектор из } W}$$

Заметим, что размерность явл. инвариантом изоморфизма: если $(e_1 \dots e_n)$ - базис V, то $(f(e_1) \dots f(e_n))$ - базис W

Теорема.
Все векторные пространства одинаковой размерности n изоморфны

Док-во.
Пусть $e_1 \dots e_n$ - базис V
Координаты $x_1 \dots x_n$ произвольного вектора x однозначно опред

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

Построим координатный изоморфизм

$$f: x_{\in V} \to (x_1 \dots x_n)$$ каждому вектору сопоставим координату

$$f: V \to \mathbb{R}^n \text{ - биекция}$$ (однозначное определение)

Если $y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$, то

$$\alpha x + \beta y = (\alpha x_1 + \beta y_1) e_1 + \dots + (\alpha x_n + \beta y_n) e_n$$

$$f(\alpha x + \beta y) = (\alpha x_1 + \beta y_1; \dots; \alpha x_n + \beta y_n) = \alpha(x_1 \dots x_n) + \beta(y_1 \dots y_n) =$$
$$= \alpha f(x) + \beta f(y)$$

$$V \sim \mathbb{R}^n \qquad W \sim \mathbb{R}^n$$

§5 Пересечение и сумма подпространств. Формула размерности Грассмана.

Определение. Подмножество L лин пространства V наз линейным подпространством V, если оно само явл. лин пространством отн. сложения векторов и умножения на скаляр
(L - замкнуто отн сложения и умн на скал)

Пусть $L_1 \dots L_k$ - лин подпространства пр-ва V

Определение. Пересечением подпространств $L_1 \dots L_k$ наз множество

$$L_1 \cap \dots \cap L_k = \{x \in V \mid x \in L_i \quad i = 1 \dots k\}$$

! Всегда непусто, т.к содержит 0

Определение. Суммой подпространств $L_1 \dots L_k$ наз множество всевозможных векторов x, представимых в виде

$x = x_1 + \dots x_k \qquad x_i \in L_i$

$$L_1 + \dots + L_k = \sum_{i=1}^{k} L_i = \{ x = x_1 + \dots + x_k \mid x_i \in L_i \quad i = 1 \dots k \}$$

Теорема

Сумма и пересечения подпространств V явл. линейными подпространствами V

Док-во

$x \in \cap L_i$ $\qquad x + y \in \cap L_i$!

$y \in \cap L_i$

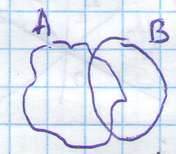
$x \in \cap L_i \Rightarrow x \in L_i \quad i = 1 \dots k$

$\qquad\qquad\quad y \in L_i \quad i = 1 \dots k$

$x \in L_1$, $y \in L_1$ $\Rightarrow x + y \in L_1$, т.к L_1 - подпростр.

$x \in L_2$, $y \in L_2$ $\Rightarrow x + y \in L_2$, т.к L_2 - подпростр.

! Объединение $L_1 \vee L_2$ - не обязательно подпростр.



$vol\,(A \cup B) = vol\,A + vol\,B - vol\,(A \cap B)$

Теорема (Формула размерности Грассмана)

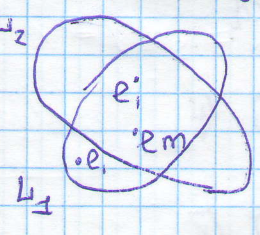
Для любых двух линейных подпространств L_1 и L_2

$$\dim (L_1 + L_2) = \dim L_1 + L_2 - \dim (L_1 \cap L_2)$$

Док-во

1) Пусть $\dim L_1 = k$, $\dim L_2 = l$ $\dim (L_1 \cap L_2) = m$

Выберем в пересечении какой-нибудь базис $e_1 \dots e_m$, дополним его до базиса $(e_1 \dots e_m, a_1 \dots a_{k-m})$ подпростр. L_1 и до базиса подпространства L_2 $(e_1 \dots e_m, b_1 \dots b_{l-m})$



Покажем, что система векторов $e_1 \dots e_m, a_1 \dots a_{k-m}, b_1 \dots b_{l-m}$ образует базис суммы $(L_1 + L_2)$

1) Проверим лин. независимость.

Пусть

$$(*) \quad \gamma_1 e_1 + \dots + \gamma_m e_m + \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_{k-m} a_{k-m} + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_{l-m} b_{l-m} = 0$$

Тогда

$$\underbrace{-\beta_1 b_1 - \beta_{l-m} b_{l-m}}_{\text{вектор из } L_2} = \underbrace{\gamma_1 e_1 + \dots + \gamma_m e_m + \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_{k-m} a_{k-m}}_{\text{вектор из } L_1},$$

т.е этот вектор пересечения $(L_1 \cap L_2)$

т.е

$$\delta_1 e_1 + \dots \delta_m e_m + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_{l-m} b_{l-m} = 0$$

$e_1 \dots e_m, b_1 \dots b_{l-m}$ - базис $L_2 \Rightarrow$ все коэф. равны нулю.

в частности $\beta_1 = \dots = \beta_{l-m} = 0$.

Из (*) $\Rightarrow \gamma_1 e_1 + \ldots + \gamma_m e_m + \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_{k-m} a_{k-m} = 0$
но
$e_1 \ldots e_m, a_{k-m}$ – базис $\Rightarrow$ все коэф. равны 0

2) проверим полноту.

$$\langle e_1 \ldots e_m, a_1 \ldots a_{k-m}, b_1 \ldots b_{l-m} \rangle = L_1 + L_2$$

$$\dim(L_1 + L_2) = m + (k-m) + (l-m) = k + l - m$$

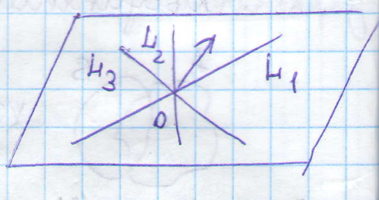
Пусть L – подпространства V, коразмерность подпр-тва L $\quad \operatorname{codim} = \dim V - \dim L$

Подпространство коразмерности 1 наз гиперплоскостью

§6. Прямая сумма подпространств

В сумме подпространств $V = L_1 + L_2 + \ldots + L_m$ любой вектор V

$v = v_1 + v_2 + \ldots + v_m$ не обязательно однозначно



Определение Если каждый вектор $v \in V$ единств. образом раскладывается в сумму $v = v_1 + \ldots + v_m$ то сумма наз. прямой

Теорема 1
Сумма является прямой тогда и только тогда, когда нулевой вектор имеет единственное разлож.
$$0 = 0 + 0 + \ldots + 0$$

Теорема 2
Сумма является прямой $\Leftrightarrow L_i \cap (L_1 + \ldots + \hat{L_i} + \ldots + L_m) = 0$ ($\hat{L_i}$ – нет в сумме)

$$\dim V = \sum_{i=1}^{m} \dim V_i$$

Теорема 3
$V = L_1 \oplus L_2 \Leftrightarrow$ 1) $L_1 \cap L_2 = \{0\}$
2) $\dim V = \dim L_1 + \dim L_2$

Дополнительное подпространство

Пусть L_1 – лин. подпространство V
Подпространство L_2 наз. дополнительным к L_1 если $L_1 \oplus L_2 = V$

Замечание Если $L_1 \neq \{0\}$, то доп. подпространство определено неоднозначно.

Теорема 4
Для любого подпространства L_1 сущ. дополнит. подпространство

Док-во Пусть $e_1 \dots e_m$ - базис L_1

Дополним его до базиса V

$$e_1 \dots e_m \; e_{m+1} \dots e_n$$

$$L_2 = \langle e_{m+1} \dots e_n \rangle$$

определяем L_2 таким образом

Глава 2. Линейные операторы.

§1. Линейные отображения.

Определение. Пусть V и W - векторные пространства размерности m и n над одним и тем же полем. Отображение $f: V \to W$ наз. линейным, если

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$f(\lambda x) = \lambda f(x) \quad \sim \quad f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

Если $W=V$, то f наз лин. оператором.

<u>примеры</u>

1) M_n - пр-во многочленов степени $\leq n$

$D: M_n \to M_n$

$Dp(t) = p'(t)$

2) M - пр-во всех многочленов

$$Sp(t) = \int_0^t p(x)\,dx$$

3) $V = L_1 \oplus L_2$

$p: V \to V$

$\forall x \in V \quad x = x_1 + x_2 \;; \; x_1 \in L_1 \;; \; x_2 \in L_2$

$p_x = x_1$ - оператор проектирования пр-ва V на L_1 параллельно L_2

$R: V \to V$

$Rx = x_1 - x_2$ - оператор отражения пр-ва V отн. L_1 параллельно L_2.

4) $O: V \to W$

$O(x) = 0$ нулевой оператор

5) $I: V \to V$

$Ix = x$ тождественный оператор

Свойства:

1. Всякое лин. отображение переводит нулевой вектор в нулевой

$$f(0_x) = f(\underbrace{0}_{\text{число}} \cdot x) = 0 \cdot f(x) = 0_W$$

2. Лин. отображение сохраняет лин. комбинации

$$f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k) = \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_k f(x_k)$$

(док-во индукция по k)